

# Topología I

## Examen IX

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Topología I

# Examen IX

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2023-2024

**Asignatura** Topología I.

**Curso Académico** 2023-24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Jose Antonio Gálvez López.<sup>1</sup>

**Descripción** Convocatoria Extraordinaria.

**Fecha** 14 de febrero de 2023.

**Duración** 3 horas.

---

<sup>1</sup>El examen lo pone el departamento.

**Ejercicio 1** (4.5 puntos). Sea  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Para cada  $(x, y) \in X$  denotamos:

$$B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid 0 < t \leq 1\}$$

En  $X$ , consideramos la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{B_{(x,y)} \mid (x, y) \in X\}$$

- (a) Prueba que  $\mathcal{B}$  es base para alguna topología  $\mathcal{T}$  en  $X$ .
- (b) ¿Verifica  $(X, \mathcal{T})$  el segundo axioma de numerabilidad?
- (c) Calcula el interior, la clausura y la frontera de  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq 1\}$ .
- (d) En  $X$  consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \mid (x, y) = \lambda(x', y')$$

Prueba que  $(X/R, \mathcal{T}/R)$  es homeomorfo a  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$  donde  $\mathcal{T}_D$  es la topología discreta.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Elige una de las siguiente preguntas (2a o 2b):

- 2a. Sean  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos. Prueba que  $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$  es conexo si y sólo si  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$  son conexos.
- 2b. Prueba que toda aplicación continua e inyectiva  $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$  es un homeomorfismo.

**Ejercicio 3** (3 puntos). Consideremos  $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ , donde  $p$  es un punto que no pertenece a  $\mathbb{R}$  y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

donde  $\mathcal{T}_u$  denota la topología usual de  $\mathbb{R}$ . Demuéstrese que:

- (a)  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico.
- (b)  $(X, \mathcal{T})$  es compacto.
- (c)  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_2$  y conexo.



**Ejercicio 1** (4.5 puntos). Sea  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Para cada  $(x, y) \in X$  denotamos:

$$B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid 0 < t \leq 1\}$$

En  $X$ , consideramos la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{B_{(x,y)} \mid (x, y) \in X\}$$

(a) Prueba que  $\mathcal{B}$  es base para alguna topología  $\mathcal{T}$  en  $X$ .

Para una mayor intuición de la base dada, notemos que  $B_{(x,y)}$  es el segmento que une  $(0,0)$  con  $(x, y)$  sin incluir el  $(0,0)$ .

Para ver que  $\mathcal{B}$  es base, veamos que verifican B1 y B2:

$$\text{B1) } \bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} = X$$

Por ser  $B_{(x,y)} \subseteq X \quad \forall B_{(x,y)} \in \mathcal{B}$ , sabemos que  $\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} \subseteq X$ .

Sea  $(x, y) \in X$ ,  $(x, y) \in B_{(x,y)} \Rightarrow (x, y) \in \bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)}$ .

Luego  $X \subseteq \bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)}$ .

$\bigcup_{B_{(x,y)} \in \mathcal{B}} B_{(x,y)} = X$  y se tiene B1.

B2) Sean  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Si  $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} \mid x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Sean  $B_{(x,y)}, B_{(x',y')} \in \mathcal{B}$ . Sea  $x = (u, v) \in B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')}$   
 Veamos que:

$$B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} = B = \{(tx'', ty'') \mid 0 < t \leq 1\} = B_{(x'',y'')}$$

Donde:

$$(x'', y'') = \begin{cases} (x, y) & \text{si } \|(x, y)\| \leq \|(x', y')\| \\ (x', y') & \text{si } \|(x', y')\| < \|(x, y)\| \end{cases}$$

Por lo que:

$$B = \begin{cases} B_{(x,y)} & \text{si } \|(x, y)\| \leq \|(x', y')\| \\ B_{(x',y')} & \text{si } \|(x', y')\| < \|(x, y)\| \end{cases}$$

$B \in \mathcal{B}$  y además,  $x \in B = B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')}$

Por lo que se tendría B2.

$$\begin{aligned} (u, v) \in B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} &\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in ]0, 1] \mid (u, v) = \alpha(x, y) = \beta(x', y') \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) = \frac{\beta}{\alpha}(x', y') \text{ con } \frac{\beta}{\alpha} > 0 \end{aligned}$$

- Supongamos que  $\|(x, y)\| \leq \|(x', y')\|$ :

Sea  $t \in ]0, 1]$ , entonces  $(tx, ty) = t(x, y) \in B_{(x,y)}$ .

$$t(x, y) = t \cdot \frac{\beta}{\alpha}(x', y')$$

Estamos interesados en ver que  $t \cdot \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$  para tener que  $(tx, ty) \in B_{(x',y')}$ .

$$\|(x, y)\| = \left\| \frac{\beta}{\alpha}(x', y') \right\| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \|(x', y')\| \leq \|(x', y')\| \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow (tx, ty) \in B_{(x',y')} \quad \forall (tx, ty) \in B_{(x,y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{(x,y)} \subseteq B_{(x',y')} \Rightarrow B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} = B_{(x,y)}$$

- Supongamos que  $\|(x', y')\| \leq \|(x, y)\|$ :

Sea  $t' \in ]0, 1]$ , entonces  $(t'x', t'y') = t'(x', y') \in B_{(x',y')}$ .

$$t'(x', y') = t' \cdot \frac{\alpha}{\beta}(x, y)$$

Estamos interesados en que  $t' \cdot \frac{\alpha}{\beta} \leq 1$  para tener que  $(t'x', t'y') \in B_{(x',y')}$ .

$$\|(x', y')\| = \left\| \frac{\alpha}{\beta}(x, y) \right\| = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \|(x, y)\| \leq \|(x, y)\| \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t' \cdot \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \Rightarrow (t'x', t'y') \in B_{(x',y')} \quad \forall (t'x', t'y') \in B_{(x',y')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{(x',y')} \subseteq B_{(x,y)} \Rightarrow B_{(x,y)} \cap B_{(x',y')} = B_{(x',y')}$$

Notemos que en el caso  $\|(x, y)\| = \|(x', y')\|$ , se tiene que  $(x, y) = (x', y')$ :

$$\|(x, y)\| = \left\| \frac{\beta}{\alpha}(x', y') \right\| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \|(x', y')\| = \|(x', y')\| \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

Acabamos de probar que si tenemos  $(u, v), (a, b) \in X \mid \exists \lambda > 0$  con  $(u, v) = \lambda(a, b)$ , entonces:

- O bien  $B_{(u,v)} \subseteq B_{(a,b)}$
- O bien  $B_{(a,b)} \subseteq B_{(u,v)}$

Cosa que nos será de utilidad a lo largo del examen.

(b) ¿Verifica  $(X, \mathcal{T})$  el segundo axioma de numerabilidad?

**No:**

Supongamos que sí, luego  $\exists \mathcal{B}'$  base numerable de  $(X, \mathcal{T})$ .

Sea  $(x, y) \in X$ , consideramos el abierto  $B_{(x,y)}$ .  $\mathcal{B}'$  es base de  $(X, \mathcal{T})$ , luego:

$$\exists B \in \mathcal{B}' \mid (x, y) \in B \subseteq B_{(x,y)}$$

Pero como  $B$  es el segmento que une el  $(0, 0)$  (sin él) con un punto, y contiene al  $(x, y)$ , ha de ser  $B_{(x,y)}$  o algo mayor. Por estar contenido en  $B_{(x,y)}$  sabemos que:

$$B = B_{(x,y)}$$

Por este razonamiento, podemos definir una aplicación  $f : X \rightarrow \mathcal{B}'$  dada por:

$$f(x, y) = B_{(x,y)} \quad \forall (x, y) \in X$$

Que es claramente inyectiva, luego  $|X| \leq |\mathcal{B}'|$ . Pero  $\mathcal{B}'$  era numerable y  $X$  no lo es, contradicción.

(c) Calcula el interior, la clausura y la frontera de  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq 1\}$ .

$$A = \mathbb{R} \times ]0, 1]$$

Veamos que  $A$  es abierto:

Sea  $(x, y) \in A$ ,  $(x, y) \in B_{(x,y)} \in \mathcal{B}$ . Veamos que  $B_{(x,y)} \subseteq A$ :

Sea  $(tx, ty) \in B_{(x,y)}$  con  $t \in ]0, 1]$ . Por ser  $(x, y) \in A \Rightarrow y \in ]0, 1]$ .

Entonces,  $ty \in ]0, 1]$  por estar ambos en  $]0, 1]$ <sup>2</sup>.

Luego  $(tx, ty) \in A \quad \forall (tx, ty) \in B_{(x,y)}$ .

Por lo que  $(x, y) \in B_{(x,y)} \subseteq A \quad \forall (x, y) \in A \Rightarrow A \in \mathcal{T}$ .

$$\text{int}(A) = A$$

Para la clausura, intuimos que será el conjunto  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Veamos primero que este conjunto es cerrado:

Consideramos  $B = X \setminus (\mathbb{R} \times ]0, +\infty[) = (\mathbb{R} \times ]-\infty, 0]) \setminus \{(0, 0)\}$  y veamos que es abierto:

Sea  $(x, y) \in B$ . Si  $y = 0 \Rightarrow (x, 0) \in B_{(x,0)} \subseteq (\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{(0, 0)\} \subseteq B$ .

Si  $y \neq 0 \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{R} \times ]-\infty, 0[ \Rightarrow y < 0$ .  $(x, y) \in B_{(x,y)} = \{(tx, ty) \mid t \in ]0, 1]\}$ .

Luego, sea  $(tx, ty) \in B_{(x,y)} \Rightarrow ty < 0 \Rightarrow (tx, ty) \in \mathbb{R} \times ]-\infty, 0[ \subseteq B$ .

Por tanto,  $(x, y) \in B_{(x,y)} \subseteq B \quad \forall (x, y) \in B \Rightarrow B \in \mathcal{T} \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ .

Para concluir que  $\bar{A} = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , veamos que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ :

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \forall B \in \mathcal{B} \mid (x, y) \in B$$

Sea  $(x, y) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , sea  $B_{(x',y')} \in \mathcal{B} \mid (x, y) \in B_{(x',y')}$

Sea  $(u, v) = \frac{(x', y')}{\|(x', y')\|} \in \mathbb{S}^1 \cap (\mathbb{R} \times ]0, +\infty[) \subseteq A$ , proporcional a  $(x', y')$

Luego:  $(u, v) \in B_{(x',y')} \Rightarrow A \cap B_{(x',y')} \neq \emptyset$ .

$$\bar{A} = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$$

Por tanto:

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{int}(A) = (\mathbb{R} \times ]0, +\infty[) \setminus (\mathbb{R} \times ]0, 1]) = \mathbb{R} \times ]1, +\infty[$$

---

<sup>2</sup>Nociones de Cálculo I

(d) En  $X$  consideramos la relación de equivalencia dada por:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 \mid (x, y) = \lambda(x', y')$$

Prueba que  $(X/R, \mathcal{T}/R)$  es homeomorfo a  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$  donde  $\mathcal{T}_D$  es la topología discreta.

Tratamos de buscar el homeomorfismo dando una identificación. Consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (x, y) &\longmapsto \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} \end{aligned}$$

• Veamos en primer lugar que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f$ :

Dados  $(x, y), (a, b) \in X$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{R}_f(a, b) &\Leftrightarrow f(x, y) = f(a, b) \Leftrightarrow \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|} \Leftrightarrow (x, y) = \frac{\|(x, y)\|(a, b)}{\|(a, b)\|} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \lambda(a, b) \text{ con } \lambda = \frac{\|(x, y)\|}{\|(a, b)\|} > 0 \Leftrightarrow (x, y)\mathcal{R}(a, b) \end{aligned}$$

• A continuación, veamos que  $f$  es sobreyectiva:

Dado  $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \|(x, y)\| = 1$ .  $\mathbb{S}^1 \subseteq X \Rightarrow (x, y) \in X$ .

$$f(x, y) = \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|} = \frac{(x, y)}{1} = (x, y) \in \mathbb{S}^1$$

Falta ver que  $f$  es abierta o cerrada para tener que es una identificación.

• Por ser el espacio de llegada  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$ , tenemos que cualquier aplicación es abierta y cerrada. En particular, nuestra  $f$  lo es.

Por un teorema visto en teoría, tenemos que  $f$  es una identificación. Por tanto,  $\tilde{f}: (X/R, \mathcal{T}/R) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_D)$  es un homeomorfismo.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos). Elige una de las siguiente preguntas (2a o 2b):

2a. Sean  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos. Prueba que  $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$  es conexo si y sólo si  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$  son conexos.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $(X \times Y, \mathcal{T}, \mathcal{T}')$  es conexo. Recordamos que  $\pi_X$  y  $\pi_Y$  son continuas y que la imagen de un conexo por una aplicación continua es un conjunto conexo. Como:

$$\pi_X(X \times Y) = X \quad \pi_Y(X \times Y) = Y$$

Se tiene que  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$  son conexos.

$\Leftrightarrow$ ) Supongamos que  $(X, \mathcal{T})$  e  $(Y, \mathcal{T}')$  son conexos. Como la conexión es una propiedad topológica (se conserva por homeomorfismos) y tenemos que, para todo  $x \in X$  e  $y \in Y$ :

$$X \cong X \times \{y\} \quad Y \cong \{x\} \times Y$$

Se tiene que  $X \times \{y\}$  y  $\{x\} \times Y$  son conexos  $\forall x \in X, y \in Y$ .

Recordamos además que la unión de conexos que intersecan a uno fijo es un conjunto conexo, luego (fijado un  $y \in Y$ ):

$$X \times Y = \left( \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y \right) \cup (X \times \{y\})$$

$$(x, y) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) \neq \emptyset \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Es un conjunto conexo.

- 2b. Prueba que toda aplicación continua e inyectiva  $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$  es un homeomorfismo.

Sea  $f : (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1}) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$  continua e inyectiva, falta ver que es sobreyectiva y abierta (o cerrada o que su inversa es continua) para llegar a que es un homeomorfismo.

Comenzamos viendo que es cerrada:

Sabemos que  $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$  es compacta y  $T_2$  (visto en clase), luego  $f$  es cerrada por un teorema visto en teoría.

Veamos ahora que es sobreyectiva:

Supongamos que no, luego  $\exists p \in \mathbb{S}^1 \mid \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$

Por ser  $\mathbb{S}^1$  conexa y  $f$  continua, sabemos que  $f(\mathbb{S}^1)$  ha de ser conexo, luego  $f(\mathbb{S}^1)$  ha de ser un arco de circunferencia.

Elegimos un punto del centro de dicho arco,  $f(q) \in \text{Im}(f)$ , y consideramos  $\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$ :

$\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}$  es conexo, pero  $\text{Im}(f) \setminus \{f(q)\}$  deja de ser conexo y se tiene que  $f(\mathbb{S}^1 \setminus \{q\}) = \text{Im}(f) \setminus \{f(q)\}$ , lo que es una contradicción con que  $f$  sea continua. Esta idea ha de formalizarse.

**Ejercicio 3** (3 puntos). Consideremos  $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ , donde  $p$  es un punto que no pertenece a  $\mathbb{R}$  y

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_u \cup \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

donde  $\mathcal{T}_u$  denota la topología usual de  $\mathbb{R}$ . Demuéstrese que:

- (a)  $(X, \mathcal{T})$  es un espacio topológico.

Notaremos al segundo conjunto como:

$$\Lambda = \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es un compacto de } \mathcal{T}_u\}$$

Primero, reescribimos  $\Lambda$  para tener una mayor intuición de lo que tenemos que demostrar:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge \mathbb{R} \setminus O \text{ es cerrado y acotado en } \mathcal{T}_u\} \\ &= \{O \subseteq X \mid p \in O \wedge O \setminus \{p\} \in \mathcal{T}_u \text{ y no está mayorado ni minorado}\}\end{aligned}$$

Veamos que se verifican A1, A2 y A3 para tener el apartado probado:

A1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{T} \\ \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u \text{ y } A = ]-\infty, -1[ \cup \{p\} \cup ]1, +\infty[ &\in \Lambda \\ \text{Luego: } X = \mathbb{R} \cup A &\in \mathcal{T}\end{aligned}$$

A2) Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

$$\text{Sea } J = \{i \in I \mid p \notin U_i\} = \{i \in I \mid U_i \notin \Lambda\}$$

$$U_j \in \mathcal{T}_u \quad \forall j \in J \Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$$

$$U_i \in \Lambda \quad \forall i \in I \setminus J. \text{ Veamos si } \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i \in \Lambda$$

$$p \in U_i \quad \forall i \in I \setminus J \Rightarrow p \in \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i$$

$$U_i \setminus \{p\} \in \mathcal{T}_u \quad \forall i \in I \setminus J \Rightarrow \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \in \mathcal{T}_u$$

Sea  $h \in I \setminus J$ , tenemos que  $U_h$  no está mayorado ni minorado y por ser  $U_h \subseteq \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\})$  no está mayorado ni minorado.

Por tanto,  $\bigcup_{i \in I \setminus J} (U_i \setminus \{p\}) \in \Lambda$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{j \in J} U_j \cup \bigcup_{i \in I \setminus J} U_i \in \mathcal{T}_u \cup \Lambda = \mathcal{T}$$

A3) Si  $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

$$\text{Si } U, V \in \mathcal{T}_u \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}.$$

$$\text{Si } U \in \mathcal{T}_u \text{ y } V \in \Lambda \Rightarrow U \cap V = U \cap (V \setminus \{p\}) \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$$

Si  $U, V \in \Lambda$ :

$$p \in U \wedge p \in V \Rightarrow p \in U \cap V$$

$$\mathbb{R} \setminus U \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \wedge \mathbb{R} \setminus V \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (U \cup \mathbb{R} \setminus V) = \mathbb{R} \setminus (U \cap V) \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$$

$$\mathbb{R} \setminus U \text{ acotado} \wedge \mathbb{R} \setminus V \text{ acotado} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (U \cup \mathbb{R} \setminus V) = \mathbb{R} \setminus (U \cap V) \text{ acotado}$$

Luego  $U \cap V \in \Lambda$ .

(b)  $(X, \mathcal{T})$  es compacto.

Supongamos que tenemos un recubrimiento de  $X$  por abiertos de  $\mathcal{T}$ :

$$X = \mathbb{R} \cup \{p\} = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ con } U_i \in \mathcal{T}$$

$$p \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists h \in I \mid p \in U_h \text{ con } U_h \in \mathcal{T} \Rightarrow U_h \in \Lambda \Rightarrow \mathbb{R} \setminus U_h \text{ es compacto}$$

$$\mathbb{R} \setminus U_h \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists J \subseteq I \text{ finito} \mid \mathbb{R} \setminus U_h \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$$

Por lo que  $\bigcup_{j \in J} U_j \cup U_h$  es finito y se verifica que:

$$X = \mathbb{R} \setminus U_h \cup U_h \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j \cup U_h$$

(c)  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_2$  y conexo.

Veamos primero que es  $T_2$ :

Sean  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ .

• Supongamos que  $x, y \in \mathbb{R}$ :

Por ser  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$   $T_2$ , tenemos que  $\exists U, V \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T}$  con  $x \in U$ ,  $y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$

• Supongamos que  $y = p$  y que  $x \in \mathbb{R}$ :

Tenemos que, para un  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ :

$$U = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \in \mathcal{T}_u \subseteq \mathcal{T} \text{ con } x \in U$$

$$V = ]-\infty, x - \varepsilon[ \cup ]x + \varepsilon, +\infty[ \cup \{p\} \in \Lambda \subseteq \mathcal{T} \text{ con } y \in V$$

$$U \cap V = \emptyset$$

Luego  $(X, \mathcal{T})$  es  $T_2$ .

Ahora que es conexo:

Se tiene que  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ .  $\mathbb{R}$  es conexo en  $\mathcal{T}_u$ .

Veamos que  $\overline{\mathbb{R}} = X$  en  $(X, \mathcal{T})$  para tener que  $(X, \mathcal{T})$  es conexo:

$X \in C_{\mathcal{T}}$ . Falta ver que  $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{T} \mid p \in U$ :

$$\text{Sea } U \in \mathcal{T} \mid p \in U \Rightarrow U \in \Lambda$$

$\{p\} \notin \Lambda$  ya que  $\mathbb{R} \setminus \{p\} = \mathbb{R}$ , que no es compacto en  $\mathcal{T}_u$ .

Además,  $\Lambda \neq \emptyset$ , luego tenemos que  $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \quad \forall U \in \mathcal{T} \mid p \in U \Rightarrow \overline{\mathbb{R}} = X$ .

En teoría se ha visto que el cierre de un conjunto conexo es conexo, por lo que se tiene probado el apartado.